Exercice 1

Soit P le polynôme défini par :

$$P(x) = -3x^2 - 7x + 20$$

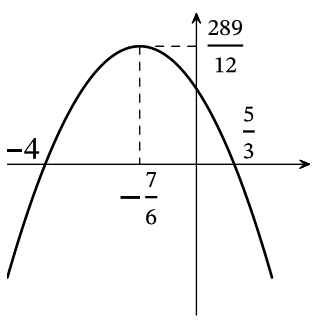
Donner, **en justifiant**, les racines de P, une factorisation de $P(x)$, la forme canonique de $P(x)$, le signe de $P(x)$ en fonction de x et l'allure de la représentation graphique de P dans un repère orthonormal.

Corrigé

1. Racines :
   $\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-3) \times 20 = 289 > 0$.
   P admet donc deux racines qui sont : $x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{289}}{2 \times (-3)} = -4$ et $x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{289}}{2 \times (-3)} = \dfrac{5}{3}$
2. Factorisation :
   Pour tout réel x, $P(x) = -3(x+4)\left(x - \frac{5}{3}\right)$.
3. Forme canonique :
   P admet un extremum (c'est d'ailleurs un maximum) en $x = \dfrac{-(-7)}{2 \times (-3)} = \dfrac{-7}{6}$.
   Ce maximum est $P\left(-\dfrac{7}{6}\right) = \cdots = \dfrac{289}{12}$
   On en déduit : pour tout réel x, $P(x) = -3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{289}{12}$
4. Signe :
   On connait les racines et le coefficient de x^2 (-3, qui est négatif), on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Courbe :
   La courbe représentant P est une parabole dont l'allure est donnée ci-dessous.



Exercice 2

Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I)\ :\ \frac{-x^2+5x+3}{2x-1} \leqslant 1$$

Corrigé

$$(I) \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x+3}{2x-1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x+3}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x+3-2x+1}{2x-1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+3x+4}{2x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

avec $\begin{cases} f(x) = -x^2+3x+4 \\ g(x) = 2x-1 \end{cases}$

Il suffit donc d'étudier le signe de f et g.

– D'une part g est une fonction affine de coefficient directeur positif et qui s'annule en $\frac{1}{2}$.
– D'autre part f est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif et qui s'annule (calculs à faire...) en -1 et 4

On peut donc construire le tableau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{f(x)}{g(x)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left[-1\,;\frac{1}{2}\right[\cup [4\,;+\infty[}$

Int 1 — Second degré

Éléments de correction

Première S4
18 septembre 2018

Exercice 3

Soit P le polynôme défini par :

$$P(x) = -7x^2 - 18x + 9$$

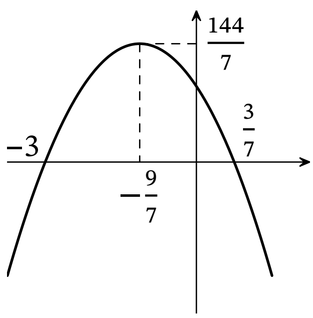
Donner, **en justifiant**, les racines de P, une factorisation de $P(x)$, la forme canonique de $P(x)$, le signe de $P(x)$ en fonction de x et l'allure de la représentation graphique de P dans un repère orthonormal.

Corrigé

1. Racines :
   $\Delta = (-18)^2 - 4 \times (-7) \times 9 = 576 > 0$.
   P admet donc deux racines qui sont : $x_1 = \dfrac{18 + \sqrt{576}}{2 \times (-7)} = -3$ et $x_2 = \dfrac{18 - \sqrt{576}}{2 \times (-7)} = \dfrac{3}{7}$
2. Factorisation :
   Pour tout réel x, $P(x) = -7(x+3)\left(x - \frac{3}{7}\right)$.
3. Forme canonique :
   P admet un extremum (c'est d'ailleurs un maximum) en $x = \dfrac{-(-18)}{2 \times (-7)} = \dfrac{-9}{7}$.
   Ce maximum est $P\left(-\dfrac{9}{7}\right) = \cdots = \dfrac{144}{7}$
   On en déduit : pour tout réel x, $P(x) = -3\left(x + \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{144}{7}$
4. Signe :
   On connait les racines et le coefficient de x^2 (-7, qui est négatif), on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Courbe :
   La courbe représentant P est une parabole dont l'allure est donnée ci-dessous.



Exercice 4

Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) : \frac{-x^2+4x+2}{2x-1} \leqslant 1$$

Corrigé

$$(I) \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+2}{2x-1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+2}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+2-2x+1}{2x-1} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+3}{2x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

avec $\begin{cases} f(x) = -x^2+2x+3 \\ g(x) = 2x-1 \end{cases}$

Il suffit donc d'étudier le signe de f et g.

- D'une part g est une fonction affine de coefficient directeur positif et qui s'annule en $\frac{1}{2}$.
- D'autre part f est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif et qui s'annule (calculs à faire...) en -1 et 3

On peut donc construire le tableau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $g(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\frac{f(x)}{g(x)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left[-1\,;\frac{1}{2}\right[\cup [3\,;+\infty[}$