Chapitre 1

Taux et indices

1.1 Taux d'évolution

1.1.1 Définition

Définition 1.1 *On appelle* **taux d'évolution** *d'une quantité y_1 à une quantité y_2 le nombre t défini par :*

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{\textit{Valeur finale} - \textit{Valeur initiale}}{\textit{Valeur initiale}}$$

Remarque : Ce taux est positif pour une augmentation et négatif pour une baisse.

Exemple *Le prix d'un article passe de 80 € à 60 €. Quel est le taux d'évolution de ce prix ?*

Le taux d'évolution de ce prix est $t = \frac{60-80}{80} = \frac{-20}{80} = -0{,}25 = -25\,\%$
Le prix a donc subi une baisse de 25 %.

1.1.2 Coefficient multiplicateur

Théorème 1.1
Si t est le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2 alors $y_2 = (1+t) \times y_1$.
$1+t$ est appelé **coefficient multiplicateur** de y_1 à y_2.

Exemple
1. *Une quantité* 1500 *augmente de* 30 %. *Quelle est la nouvelle valeur ?*
2. *Une quantité augmente de* 25 % *pour arriver à la valeur* 3750. *Quelle était la valeur initiale ?*

1. Une augmentation de 30 % correspond à une multiplication par $1 + \frac{30}{100} = 1{,}3$.
   La nouvelle valeur est donc $Q = 1500 \times 1{,}3 = 1950$
2. Une augmentation de 25 % correspond à une multiplication par $1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$.
   La valeur de départ Q' vérifie donc $Q' \times 1{,}25 = 3750$ et donc $Q' = \frac{3750}{1{,}25} = 3000$

1.1.3 Évolutions successives

Théorème 1.2
Si une quantité subit des évolutions successives de taux $t_1, t_2, t_3, \dots$ alors le taux **global** T correspondant à ces évolutions vérifie :

$$1 + T = (1+t_1) \times (1+t_2) \times (1+t_3) \dots$$

Exemple *Quel est le taux T équivalent à des évolutions successives de* $-30\,\%$, $-40\,\%$ *et* $-10\,\%$ *?*

T vérifie : $1 + T = \left(1 - \dfrac{30}{100}\right)\left(1 - \dfrac{40}{100}\right)\left(1 - \dfrac{10}{100}\right) = 0{,}7 \times 0{,}6 \times 0{,}9 = 0{,}378$
donc $T = 0{,}378 - 1 = -0{,}622 = -62{,}2\,\%$

1.1.4 Taux réciproque

Théorème 1.3
Si une quantité subit une évolution de taux t, le taux **réciproque** est le taux t' qui permet à la quantité de retrouver sa valeur initiale.
On a alors :

$$(1+t') \times (1+t) = 1$$

$$1+t' = \frac{1}{1+t}$$

Exemple *Quel est le taux réciproque d'une évolution de* +25 % *?*

Le taux réciproque t' vérifie $1+t' = \dfrac{1}{1+\frac{25}{100}} = \dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$
On a donc $t' = 0{,}8 - 1 = -0{,}2 = -20\,\%$

1.2 Indices

1.2.1 Définition

Définition 1.2 *L'indice en base 100 d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 est le nombre :*

$$i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$$

Exemple *La population d'une ville est de 25000 habitants en 2010, 27000 en 2011 et 31000 en 2012. Calculer les indices en base 100 de la population en 2011 et 2012 en prenant comme référence l'année 2010.*

En 2011, l'indice est $i_1 = \frac{27000}{25000} \times 100 = 108$ et en 2012, $i_2 = \frac{31000}{27000} \times 100 = 124$
On obtient ainsi le tableau ci-contre :

Année	2010	2011	2012
Population	25000	27000	31000
Indice	100	108	124

1.2.2 Indice et coefficient multiplicateur

Théorème 1.4
Si i est l'indice en base 100 d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 alors $\dfrac{i}{100}$ est le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2.
Le taux d'évolution de y_1 à y_2 vérifie donc :

$$1+t = \frac{i}{100}$$

Exemple *Le tableau précédent nous permet de conclure que le taux d'évolution de la population entre 2010 et 2011 est* 8 % *et celui entre 2010 et 2012 est* 24 %.

1.3 Taux moyen

1.3.1 Racine n-ième

Définition 1.3 *Soit a un nombre réel* ***positif*** *et n un entier naturel. Il existe un unique réel positif solution de l'équation $x^n = a$. Ce réel est appelé* ***racine n-ième*** *de a et se note $a^{\frac{1}{n}}$. On le note aussi $\sqrt[n]{a}$.*

Remarque : Pour tout nombre positif a, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Exemple *On a* $2^5 = 32$ *donc* $32^{\frac{1}{5}} = 2$. *On a aussi* $3^4 = 81$ *donc* $81^{\frac{1}{4}} = 3$.

1.3.2 Calcul d'un taux moyen

Définition 1.4 *Si une quantité subit n évolutions successives de taux global T alors le taux moyen de ces n évolutions est le taux t qui, appliqué n fois, est équivalent au taux T.*

Théorème 1.5
Le taux moyen t de n évolutions successives de taux global T doit vérifier l'égalité :

$$(1+t)^n = 1+T$$

Exemple *Un prix subit une évolution annuelle de* $+36\,\%$. *Quel est le taux moyen mensuel correspondant à cette évolution ?*

Le taux moyen mensuel est le taux t vérifiant $(1+t)^{12} = 1 + \frac{36}{100}$.
On a ainsi $(1+t)^{12} = 1{,}36$ et donc $1+t = 1{,}36^{\frac{1}{12}}$ soit $t = 1{,}36^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}026$.
Le taux moyen mensuel est donc d'environ 2,6 %