Nom :

Exercice 1 **4 points**

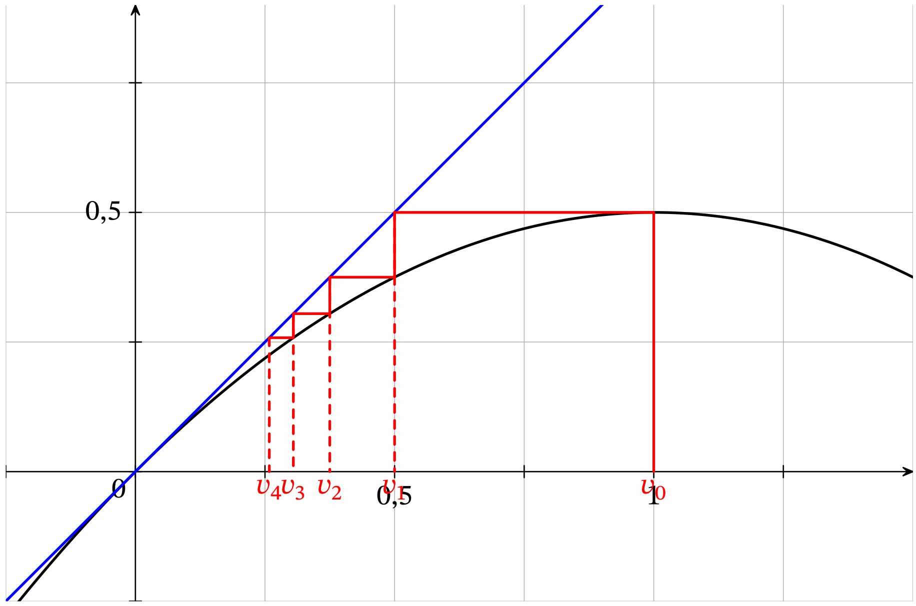
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -0{,}5v_n^2 + v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Sur la figure ci-dessous, on donne la représentation graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = -0{,}5x^2 + x$$

Représenter, sur l'axe des abscisses, les 5 premiers termes de la suite.



On utilise la droite d'équation $y = x$ et on obtient le graphique ci-dessus.

2. Quel semble être le sens de variation de v ? Quelle semble être la limite de v ?

La suite v semble être décroissante et sa limite semble être 0.

3. Déterminer par un calcul le sens de variation de v.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -0{,}5v_n^2 < 0$. $\boxed{\text{La suite } v \text{ est donc décroissante}}$.

Exercice 2 **10 points**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n - 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2. Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

   $u_1 = \frac{3}{5}u_0 - 4 = \frac{3}{5} \times 15 - 4 = \boxed{5}$ et $u_2 = \frac{3}{5}u_1 - 4 = \frac{3}{5} \times 5 - 4 = 3 - 4 = \boxed{-1}$

   $u_2 - u_1 = -1 - 5 = -6$ et $u_1 - u_0 = 5 - 15 = -10$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$

   $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-1}{5}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = u_n + 10$$

   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $v_{n+1} = u_{n+1} + 10 = \frac{3}{5}u_n - 4 + 10 = \frac{3}{5}(v_n - 10) - 4 + 10 = \frac{3}{5}v_n - \frac{3}{5} \times 10 - 4 + 10 = \frac{3}{5}v_n.$

   $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } q = \frac{3}{5} \text{ et de premier terme } v_0 = u_0 + 10 = 25}$

   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.

   (v_n) est une suite géométrique donc :

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{25 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - 10 = \boxed{25 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}$

3. a) Donner, en justifiant, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

   On sait que $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0.$

   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 25 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - 10$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -10}$

   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < -9{,}9$.

   Les calculs successifs à la calculatrice montre que $u_{10} \approx -9{,}85$ et $u_{11} \approx -9{,}91$.
   $\boxed{\text{Le plus petit entier } n \text{ tel que } u_n < -9{,}9 \text{ est donc } 11}$

4. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \qquad \text{et} \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$T_n = \frac{125}{2} \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$$

   (v_n) est une suite géométrique donc :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 25 \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} = 25 \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{2}{5}}$$

$$= \boxed{\frac{125}{2} \times \left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de S_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 - 10 + v_1 - 10 + \cdots + v_n - 10 = T_n + (n+1) \times (-10)$

$$= \boxed{\frac{125}{2} \times \left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) - 10(n+1)}$$

Exercice 3 — 6 points

1. Démontrer que toute suite v définie par $v_n = an + b$, où a et b sont des réels fixés, est arithmétique de raison a.

   Pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = a(n+1) + b - an - b = an + a + b - an - b = a$.
   $\boxed{\text{La suite } v \text{ est donc arithmétique de raison } a.}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 4n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2. Calculer u_1 et u_2.

   $u_1 = u_0 + 4 \times 1 - 3 = 1 + 4 - 3 = \boxed{2}$ et $u_2 = u_1 + 4 \times 2 - 3 = 2 + 8 - 3 = \boxed{7}$

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$v_n = u_n - u_{n-1}$$

   a) Calculer v_1 et v_2.

   $v_1 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = \boxed{1}$ et $v_2 = u_2 - u_1 = 7 - 2 = \boxed{5}$

   b) Démontrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1 (on pourra utiliser la question 1).

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - u_{n-1} = 4n - 3$. Donc, d'après la question 1,
   $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est arithmétique de raison 4 et de premier terme } v_1 = 1.}$

   c) En utilisant les formules du cours, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2n^2 - n$$

   v est une suite arithmétique donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = n \times \frac{v_1 + v_n}{2} = n \times \frac{1 + 4n - 3}{2} = n \times \frac{4n-2}{2} = n(2n-1) = \boxed{2n^2 - n}$$

d) En remarquant que $v_1+v_2+\cdots+v_n = u_1-u_0+u_2-u_1+u_3-u_2+\cdots+u_n-u_{n-1}$ et en utilisant la question précédente, déterminer le terme général de u_n en fonction de n.

Pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_1+v_2+\cdots+v_n = \cancel{u_1}-u_0+\cancel{u_2}-\cancel{u_1}+u_3-\cancel{u_2}+\cdots+u_n-\cancel{u_{n-1}} = u_n-u_0$$

On peut donc écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n-u_0 = 2n^2-n$$

Cette égalité étant vraie aussi pour $n=0$, on en déduit :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n = 2n^2-n+1}$$