Second degré

Nom :

Exercice 1 — **8 points**

Résoudre les équations et l'inéquation ci-dessous :

$$(E_1) : 7x^4 + 11x^2 - 6 = 0 \qquad (E_2) : \sqrt{3x^2+13x+7} = \sqrt{x^2-8} \qquad (I) : \frac{(x-6)^2}{2x-3} \geqslant x$$

$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ 7X^2 + 11X - 6 = 0 \end{cases}$

Après calculs (discriminant, etc.), on obtient les solutions de $7X^2 + 11X - 6 = 0$: -2 et $\frac{3}{7}$.

Ainsi : $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ X = -2 \text{ ou } X = \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = -2 \text{ ou } x^2 = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{3}{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{-\frac{\sqrt{21}}{7} ; \frac{\sqrt{21}}{7}\right\}}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 13x + 7 = x^2 - 8 \\ x^2 - 8 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 13x + 15 = 0 \\ x^2 - 8 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ ... Calcul de Δ etc. ... $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -5 \\ x^2 - 8 \geqslant 0 \end{cases}$

Seule la solution -5 satisfait l'inéquation.
On a donc $\boxed{\mathcal{S}_2 = \{-5\}}$

$(I) \Leftrightarrow \frac{x^2-12x+36}{2x-3} - x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-12x+36-x(2x-3)}{2x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-12x+36-2x^2+3x}{2x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\frac{-x^2-9x+36}{2x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$ avec $\begin{cases} f(x) = -x^2 - 9x + 36 \\ g(x) = 2x - 3 \end{cases}$

Il suffit donc d'étudier le signe de f et g.

- D'une part g est une fonction affine de coefficient directeur positif et qui s'annule en $\frac{3}{2}$.
- D'autre part f est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif et qui s'annule (calculs à faire...) en -12 et 3

On peut donc construire le tableau :

x	$-\infty$		-12		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $g(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\frac{f(x)}{g(x)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; -12] \cup \left]\frac{3}{2} ; 3\right]}$

Exercice 2 — 6 points

Soit P le polynôme du second degré défini par :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

1. Vérifier que 1 est une racine de P.

   $P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$. Donc 1 est une racine de P.

2. Pour tous réels a, b et c et tout réel x, développer $(x-1)(ax^2+bx+c)$.

   Pour tous a, b et c et tout x,
   $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

3. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

   Pour tout x, $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow$ Pour tout x, $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = -2 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2 = -1 \\ -1 - b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

   Conclusion : Pour tout réel x, $\boxed{P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 1)}$

4. Résoudre l'inéquation $(I)\ :\ P(x) \leqslant 0$

   $(I) \Leftrightarrow f(x) \times g(x) \leqslant 0$ avec $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + x - 1 \\ g(x) = x - 1 \end{cases}$

   Il suffit donc d'étudier le signe de f et g.

   - D'une part g est une fonction affine de coefficient directeur positif et qui s'annule en 1.
   - D'autre part f est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est positif et qui s'annule (calculs à faire...) en -1 et $\frac{1}{2}$.

   On peut donc construire le tableau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x) \times g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup \left[\frac{1}{2}\,;1\right]}$

Exercice 3 — 3 points

Étant donnés deux réels p et q, on définit le polynôme du second degré R par :

$$R(x) = 2x^2 + px + q$$

1. Déterminer les valeurs de p et q pour que les racines de R soient $-\frac{1}{2}$ et 3.

   $-\frac{1}{2}$ et 3 sont les racines de R donc, pour tout réel x, $R(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$
   En développant l'expression obtenue, on a : $R(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$
   Par identification des coefficients, on a : $\boxed{p = -5 \text{ et } q = -3}$

2. Avec les valeurs trouvées précédemment, donner la forme canonique de R.

   Pour tout réel x, $R(x) = 2(x-\alpha)^2 + \beta$
   avec $\alpha = -\frac{-5}{2\times 2} = \frac{5}{4}$ et $\beta = R(\alpha) = R\left(\frac{5}{4}\right) = 2\times\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\times\frac{5}{4} - 3 = -\frac{49}{8}$
   Conclusion : Pour tout réel x, $\boxed{R(x) = 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}}$

Exercice 4 — 3 points

Un père a 25 ans de plus que son fils. Le produit de leurs âges est 224.
Quel est l'âge de chacun ?

1. Choix de l'inconnue :
   Soit x l'âge de l'enfant.
2. Mise en équation :
   L'âge du père est donc $x+25$. Le produit des âges est 224 donc $x(x+25) = 224 \quad (E)$
3. Résolution :
   $(E) \Leftrightarrow x^2 + 25x = 224 \Leftrightarrow x^2 + 25x - 224$
   Cette équation est une équation du second degré qui (après calculs...) admet deux solutions : 7 et -32.
4. Conclusion :
   Seule la solution positive convient donc $\boxed{\text{le fils a 7 ans et son père 32 ans.}}$