Devoir surveillé n° 4

Première S4 – 26 octobre 2017 – Éléments de correction

Exercice 1

Soit P le polynôme du second degré défini par :

$$P(x) = -x^2 - 2x + 8$$

On appelle f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{P(x)}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f

   $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \neq 0 \\ \dfrac{1}{P(x)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow P(x) > 0$. *Il faut donc étudier le signe de $P(x)$.*

   P est un polynôme du second degré dont les racines sont (après calculs...) 2 et -4, on obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f =]-4\,;2[}$

2. Déterminer les variations de P sur $\mathcal{D}_f$.

   Les résultats du cours sur le second degré nous permettent de donner les variations de P (les variations changent pour $x = -\frac{-2}{2\times(-1)} = -1$).

x	-4		1		2
Variations de P	0	↗	9	↘	0

3. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

   D'une part, les fonctions P et $\frac{1}{P}$ ont des variations contraires, d'autre part les fonctions $\frac{1}{P}$ et $\sqrt{\frac{1}{P}}$ ont les mêmes variations. On en déduit les tableaux ci-dessous :

x	-4		1		2
Variations de $\frac{1}{P}$	‖	↘	$\frac{1}{9}$	↗	‖
Variations de f	‖	↘	$\frac{1}{3}$	↗	‖

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-7\,;6]$ dont le tableau de variation est donnée ci-dessous :

x	-7		-5		-2		0		3		4		6
Variations de f	2	↗	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↘	-1	↘	-4

1. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variation des fonctions suivantes :
   a) $g = -3f$ b) $h = \sqrt{g}$

a) L'ensemble de définition de g est le même que celui de f donc $\mathcal{D}_g = [-7\,;6]$. De plus $-3 < 0$ donc f et $g = -3f$ ont des sens de variation contraires. On en déduit le tableau ci-dessous :

x	-7		-5		-2		0		3		4		6
Variations de $g = -3f$	-6	↘	-9	↗	0	↗	3	↘	0	↗	3	↗	12

b) L'ensemble de définition de h est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geqslant 0$. Le tableau de variation précédent nous montre que $\mathcal{D}_h = [-2\,;6]$.
De plus, g et $h = \sqrt{g}$ ont les mêmes variations. On en déduit le tableau suivant :

x	-2		0		3		4		6
Variations de $h = \sqrt{g}$	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0	↗	$\sqrt{3}$	↗	$\sqrt{12}$

2. Donner l'ensemble de définition et le tableau de variation des fonctions suivantes :
   a) $k = f + 1$ b) $l = \dfrac{1}{k}$

a) L'ensemble de définition de k est le même que celui de f donc $\mathcal{D}_k = [-7\,;6]$. De plus f et $k = f + 1$ ont les mêmes variations. On en déduit le tableau ci-dessous :

x	-7		-5		-2		0		3		4		6
Variations de $k = f+1$	3	↗	4	↘	1	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-3

b) L'ensemble de définition de l est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $k(x) \neq 0$. Le tableau précédent nous montre que $\mathcal{D}_l = [-7\,;0[\cup]0\,;4[\cup]4\,;6]$.
De plus, k et $l = \frac{1}{k}$ ont des sens de variation contraires. On en déduit le tableau ci-dessous :

x	-7		-5		-2		0		3		4		6
Variations de $l = \frac{1}{k}$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	1	↗	‖	↘	1	↗	‖	↗	$-\frac{1}{3}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = |x+3| - |-2x+2|$$

1. Donner une écriture simplifiée de $f(x)$ selon les valeurs de x (on pourra utiliser un tableau).

Par définition de la valeur absolue :

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & si\ x+3 \geqslant 0 \\ -x-3 & si\ x+3 < 0 \end{cases} \quad et \quad |-2x+2| = \begin{cases} -2x+2 & si\ -2x+2 \geqslant 0 \\ 2x-2 & si\ -2x+2 < 0 \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture de $f(x)$, il faut donc étudier le signe de $x+3$ et de $-2x+2$.

Les deux fonctions précédentes sont des fonctions affines. Pour obtenir leur signe, il suffit de trouver leur racine et regarder le signe de leur coefficient directeur.

$x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ et le coefficient directeur est $1 > 0$.
$-2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et le coefficient directeur est $-2 < 0$.

On peut résumer tout ça dans un tableau :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x+3\rvert =$		$-x-3$		$x+3$		$x+3$	
Signe de $-2x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$\lvert -2x+2\rvert =$		$-2x+2$		$-2x+2$		$2x-2$	
$f(x) =$		$x-5$		$3x+1$		$-x+5$	

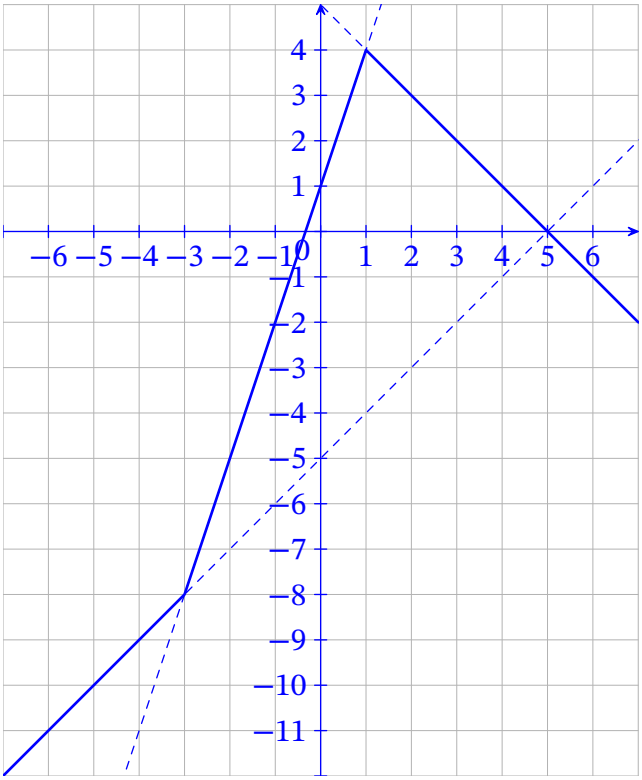
2. En déduire le tableau de variation de f.

La fonction f est affine par morceaux (elle est affine sur chacun des trois intervalles précédents). On en déduit donc sons sens de variation grâce au coefficient directeur de chacune des fonctions affines.
On obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x) =$		$x-5$		$3x+1$		$-x+5$	
Variations de f		↗		↗	4	↘	

3. Tracer la représentation graphique de f

On obtient la représentation graphique de f en traçant les trois droites représentant les trois fonctions affines précédentes et en ne gardant que la partie correspondant à l'intervalle souhaité.



Exercice 4

Résoudre l'équation suivante :

$$(E) : \left|x^2 - 3x - 2\right| = \left|x + 3\right|$$

$$(E) : \left|x^2 - 3x - 2\right| = \left|x + 3\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 3x - 2 = x + 3 \\ ou \\ x^2 - 3x - 2 = -x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ ou \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

On résout chacune des équations du second degré précédentes avec les méthodes habituelles. La première a deux solutions : -1 et 5, la seconde a une unique solution : 1.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 1; 5\}}$